# Lineáris Kvadratikus Regulátorok // Ulam-Hyers Stabilitás // Turbulencia Modellezése

Dr. Kolumbán József

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

**Lineáris Kvadratikus Regulátorok (LQR)**:
Optimális vezérlési probléma:

- lineáris irányított rendszer:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

  ahol $x \in \mathbb{R}^n$ állapot, $u \in \mathbb{R}^m$ vezér függvény, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

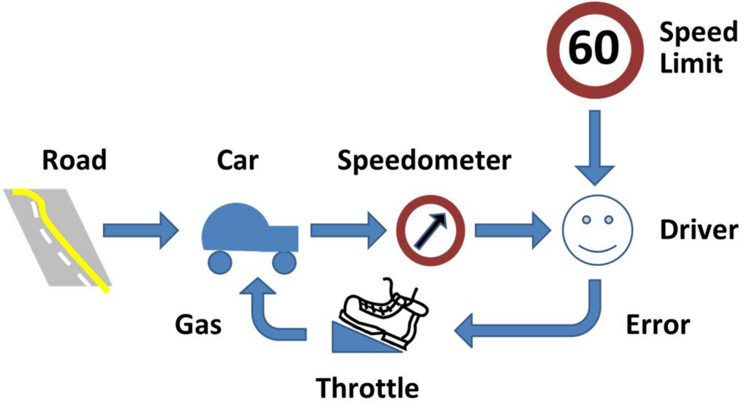
- minimizáljuk az alábbi kvadratikus ár funkcionált:

$$J(u) = x(t_1) \cdot Fx(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (x \cdot Qx + u \cdot Ru + 2x \cdot Nu)\, dt,$$

  ahol $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $N \in \mathbb{R}^{n\times m}$

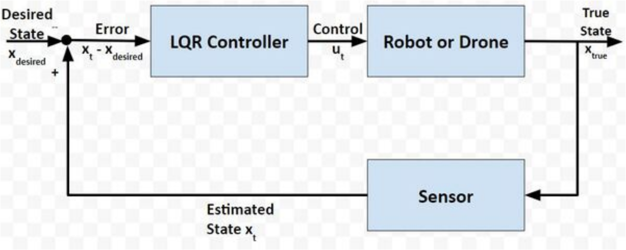
**Lineáris Kvadratikus Regulátorok (LQR)**:
Példák:

- önvezérlő kocsi/robot esetén egy adott pálya követése
- drón lebegése adott magasságban



**Lineáris Kvadratikus Regulátorok (LQR)**:
Példák:

- önvezérlő kocsi/robot esetén egy adott pálya követése
- drón lebegése adott magasságban



**Lineáris Kvadratikus Regulátorok (LQR)**:
Szakdolgozat elvárásai - LQR algoritmus kidolgozása:

- szakirodalom elsajátítása: Pontrjagin maximum elv, Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet
- a fentiek alapján megszerkeszthető egy visszacsatolásos optimális vezérlés ("feedback control")
- ehhez szükséges egy Riccati egyenlet megoldása

Szakirodalom: D. Liberzon, Calculus of Variations and Optimal Control Theory - A Concise Introduction

**Ulam-Hyers Stabilitás D.E. Rendszerekre**:

- $\varepsilon$-approximáció konvergenciája:

$$|y'(t) - f(t, y(t))| < \varepsilon, \ \forall t \in [a, b],$$

mikor mondható el, hogy létezik

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b],$$

amelyre

$$|x(t) - y(t)| < c_f \varepsilon, \ \forall t \in [a, b]?$$

- Picard-Lindelöf módszer: átírhatóak integrálegyenletekre:

$$x = T(x), \ y = \tilde{T}(y), \ \|T - \tilde{T}\|_\infty < \varepsilon(b - a)$$

$T, \tilde{T}$ kontrakciók + Banach fixpont tétel

$$\|x - y\| = \|T(x) - \tilde{T}(y)\| \le \|T(x) - T(y)\| + \|T(y) - \tilde{T}(y)\| < L\|x - y\| + \varepsilon(b - a)$$

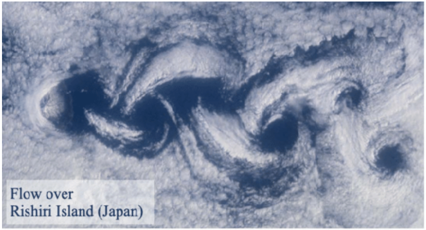
**Ulam-Hyers Stabilitás D.E. Rendszerekre**:
Szakdolgozat elvárásai - optimálisabb konvergencia kidolgozása D.E. rendszerek esetén:

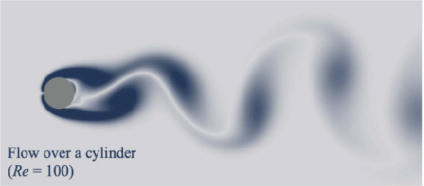
- vektor-értékű normák megismerése
- Perov tétel - a Banach fixpont tétel vektor változata
- a fenti ötletek általánosítása és alkalmazása 2D-s D.E. rendszerekre

Szakirodalom: Sz. András, J. J. Kolumbán, On the Ulam–Hyers stability of first order differential systems with nonlocal initial conditions

## Turbulencia Modellezése Konvex Integrálással

- turbulencia = olyan folyadékmozgás amelyben kaotikus nyomás- illetve sebességváltozás van
  Pl. Kármán-féle örvény:




- Euler egyenletek ideális folyadék leírására:

$$\partial_t v + \text{div}\,(v \otimes v) + \nabla p = 0, \quad \text{div}\ v = 0$$

- De Lellis, Székelyhidi Jr, 2009: létezhet végtelen sok kaotikus megoldás, ezek felelnek meg a turbulenciának

**Turbulencia Modellezése Konvex Integrálással**

- De Lellis, Székelyhidi Jr, 2009: fő ötlet: konvex relaxáció + "végtelen dimenziós Krein-Milman érv"

$$\mathrm{conv}\{(v,\sigma):\ v\otimes v-\sigma=e\mathrm{Id}\}=\{(v,\sigma):\ \lambda_{\max}(v\otimes v-\sigma)\leq e\}$$

Szakdolgozat elvárásai - a De Lellis-Székelyhidi cikk megértése, megfelelő funkcionálanalízis illetve konvex analízis alapok elsajátítása:

- $L^p$ terek
- gyenge konvergencia
- Baire kategória elmélet
- Krein-Milman tétel

# Köszönöm a figyelmet!