

Véletlen Fraktálok

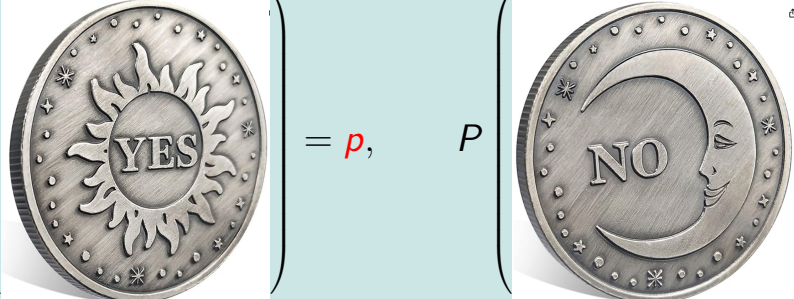
Simon Károly
Sztochasztika Tanszék

Lehetséges BSc, MSc, TDK és doktori téma

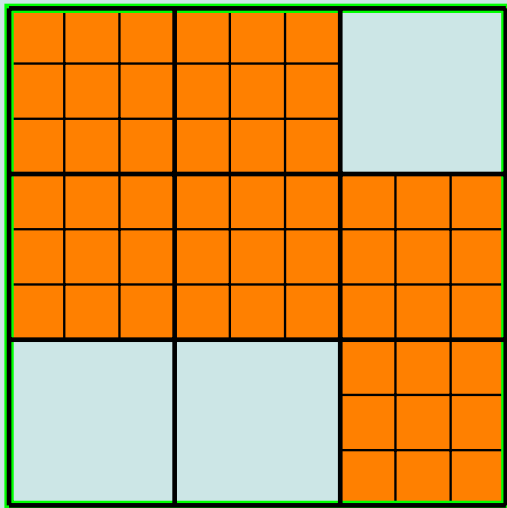
Szükséges: Sztochasztikus folyamatok tárgy legalább felvéve

`www.math.bme.hu/~simonk`

Adott egy $0 < p < 1$ és hozzátartozó nem-szabályos érme:

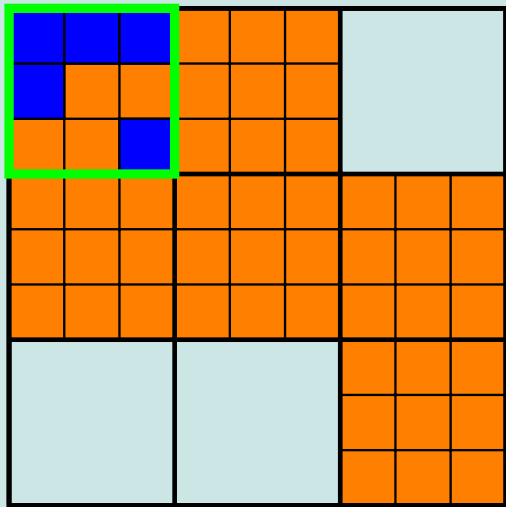
$$P \left(\text{YES} \right) = p, \quad P \left(\text{NO} \right) = 1 - p.$$


Az érméket mindig mindentől függetlenül dobjuk fel.



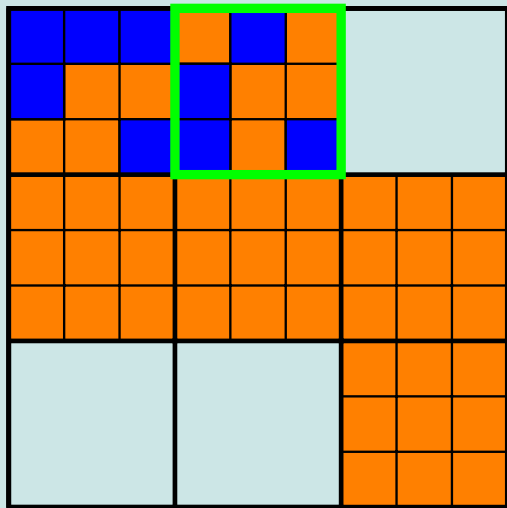
Λ_1





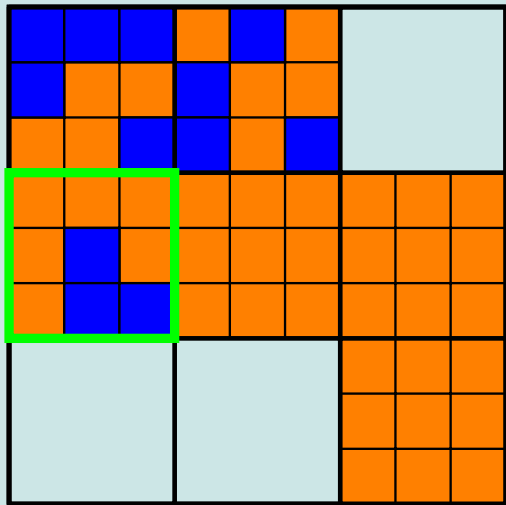
Λ_2





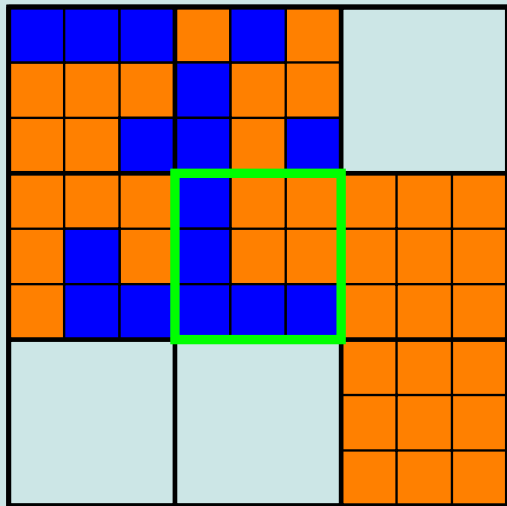
Λ_2





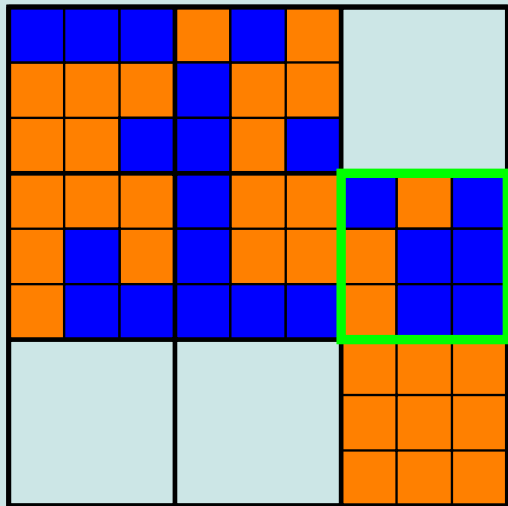
Λ_2





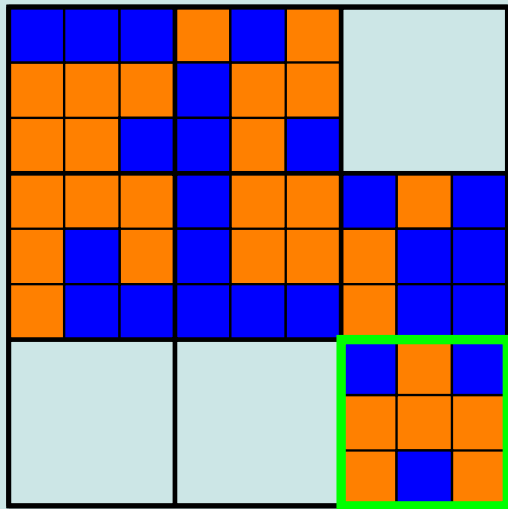
Λ_2





Λ_2





Λ_2



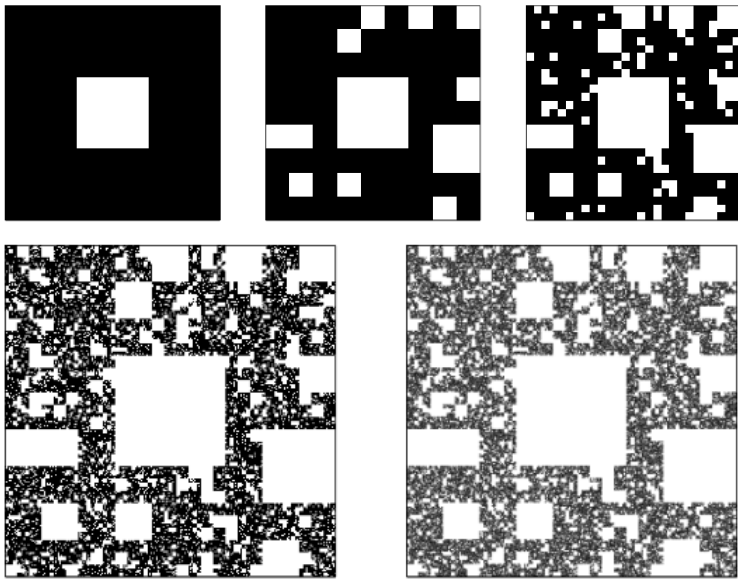


Figure: Az első öt approximáció amikor $p = 0.85$

Legyen $\mathcal{E}_n$ a megtartott n -ik szintű négyzetek halmaza. A Fraktál perkolációs halmaz n -ik szintű approximációja:

$$\Lambda_n := \bigcup_{Q \in \mathcal{E}_n} Q.$$

A Fraktál perkolációs halmaz

$$\Lambda := \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n.$$

Azt mondjuk, hogy a folyamat kihal, ha $\Lambda = \emptyset$.

Azt mondjuk a Λ perkolál, ha van a Λ halmaznak egy összefüggő komponense ami a $[0, 1]^2$ egységnégyzetet alsó oldalát összeköti a felsővel.

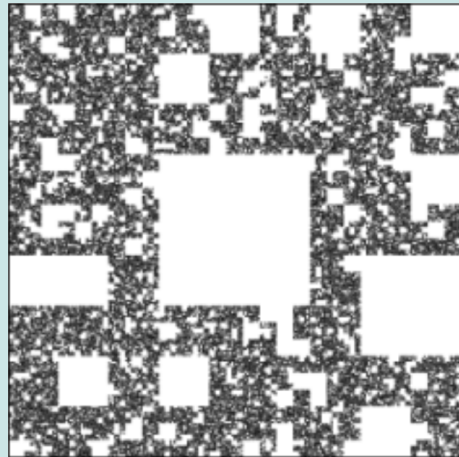
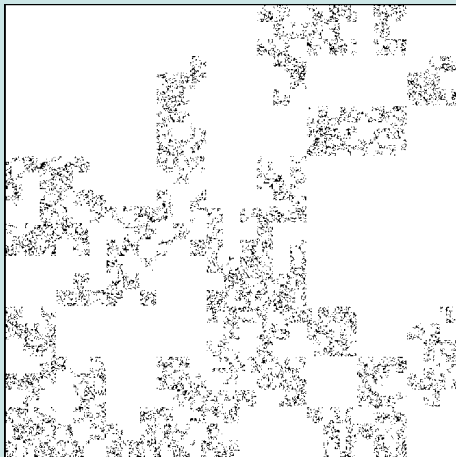


Figure: Baloldal: nem perkolál, jobboldal: perkolál

Tétel [J.T. Chayes, L. Chayes, R. Durrett] ¹

Ha Λ minden összefüggő komponense egy elemű halmaz akkor azt mondjuk, hogy Λ teljesen széteső és azt írjuk, hogy **TSZ**. Legyen

$$p_c := \inf \{p : \mathbb{P}_p(\Lambda \text{ perkolál}) > 0\}.$$

Ekkor $0 < p_c < 1$ és

$$p_c = \sup \{p : \mathbb{P}_p(\text{TSZ}) = 1\}.$$

$p < p_c < 1$: Λ minden összefüggő komponense egy elemű halmaz

$p \geq p_c$: Λ perkolál pozitív valószínűséggel.

¹J. Chayes, L. Chayes, and R. Durrett. Connectivity properties of Mandelbrot's percolation process. *Probability theory and related fields*, 77(3):307–324, 1988