

Algebrai görbék, csomóelmélet

Gyenge Ádám
Algebra és Geometria tanszék

2025.10.01.

Algebrai geometria

Lineáris algebra: elsőfokú többváltozós egyenletrendszerek megoldásainak (nulla-helyeinek) vizsgálata

Galois elmélet: egy magasabbfokú egyváltozós polinom (egyenlet) megoldásainak (nulla-helyeinek) vizsgálata

Algebrai geometria: Magasabbfokú, többváltozós egyenletrendszer nullahelyeinek vizsgálata.

Az eddigi kiosztott **Fields érmek** alapján az algebrai geometria a "legdíjazottabb" terület:

- ▶ Kodaira ('54), Serre ('54), Atiyah ('66), Grothendieck ('66), Hironaka ('70), Bombieri ('74), Mumford ('74), Deligne ('78), Yau ('82), Faltings ('86), Drinfeld ('90), Mori ('90), Kontsevich ('98), Voevodsky (2002), Okounkov (2006), Ngo (2010), Bhargava (2014), Mirzakhani (2014), Birkar (2018), Scholze (2018), Huh (2022)

Algebrai görbék

- ▶ **Definíció:** Az algebrai görbék azon a geometriai alakzatok, amelyek egy polinom egyenlet megoldásaiként jönnek létre a síkon vagy a térben.
- ▶ **Példák:**
 - ▶ *Lináris görbék:* $y = mx + b$ (egyenesek).
 - ▶ *Kvadratikus görbék:* $y = ax^2 + bx + c$ (parabolák).
 - ▶ *Harmadfokú görbék:* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- ▶ **Tulajdonságok:**
 - ▶ *Dimenzió:* A görbék 1 dimenziósak.
 - ▶ *Fok:* A polinomban megjelenő legmagasabb hatvány.
- ▶ Síkgörbék a klasszikus geometriában:

Paraméteres megadás	Implicit megadás
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$	$F(x, y) = 0$

Átjárás: Implicit függvény tétel, ha F deriváltja nem 0 (invertálható)

- ▶ **Singularitás:** A görbe olyan pontjai, ahol F deriváltjai eltűnnek, azaz ahol nem definiálható az érintőegyenes.

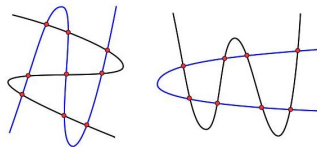
Algebrai görbék: Bézout tétel

Projektív geometria: a tér „végtelen távoli” térelemekkel való kibővítése.

Érdemes az algebrai görbéket a (komplex test feletti) projektív térben tekinteni.

Bézout tétel: Két projektív algebrai görbe metszéspontjainak száma = a fokok szorzata

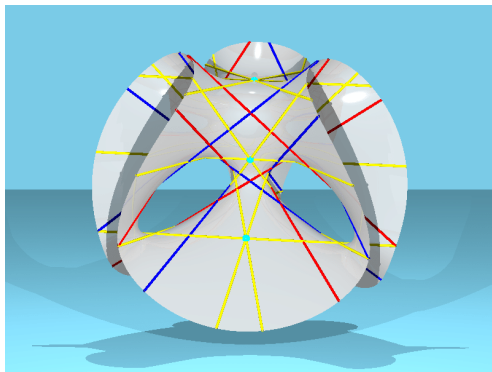
$$N = \deg C_1 \cdot \deg C_2$$



Két harmadfokú görbe Egy másod- és egy negyedfokú

Görbék Számolása

- ▶ **Tétel (19. század):** A projektív térben minden sima harmadfokú felületen pontosan 27 egyenes található.



- ▶ **Lehetséges feladatok:**
 - ▶ Modern bizonyítás: Schubert kalkulus → sok más geometriai dolog is megszámlálható vele
 - ▶ Gromov-Witten invariánsok → fizika, húrelmélet matematikája

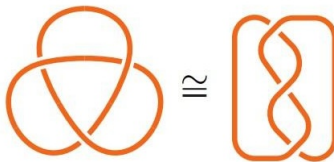
Csomók

- ▶ Egy **csomó** egy kör beágyazása a 3-dimenziós térbe, $\mathbb{R}^3$ -ba.
Példa:



Triviális csomó (Unknot)

- ▶ A csomókat **ekvivalencia** szerint tanulmányozzuk, vagyis akkor tekintjük azonosnak, ha vágás nélkül deformálhatók egymásba. Pl. Lóhere csomó (trefoil)



Kapcsolat az algebrai görbék és a csomók között

- ▶ $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ függvény
- ▶ $V_f = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ görbe izolált **szingularitással**:
 $Sing(V_f) = \{z : \partial f(z) = 0\} \cap V_f = \{0\}$

Tétel (Milnor)

Létezik egy $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ valós szám, hogy minden $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ esetén $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^2 : \|z\| \leq \varepsilon\}$ -ra hogy $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon \cap V_f$ és $K_f = S_\varepsilon \cap V_f$ egy ε -tól nem függő, valós 1 dimenziós C^∞ -sokaság (f csomója).

Példa: A_2 görbe szingularitás (*cusp*): $x^2 + y^3 = 0$

Izolált szingularitás az origóban:

$$\partial f / \partial x = \partial f / \partial y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$$

Valós kép:



Csomó:



Lehetséges feladatok

- ▶ **Csomóinvariánsok számítása és összehasonlítása:**
vizsgálható néhány klasszikus csomó (pl. trefoil, figure-eight, toruszcsonók) alapvető invariánsa: csomószám, csomóindex, Alexander-polinom, Jones-polinom, színezhetőségi invariánsok.
- ▶ **Toruszcsonók vizsgálata:**
 - ▶ A toruszcsonók (pl. $(T(p,q))$) alapvető tulajdonságai: minimális metszésszám, seifert-felület, Alexander-polinom.
 - ▶ Feladat: bizonyos osztályokban (pl. $(T(2,n))$) explicit invariánsok levezetése, és összehasonlítás más csomócsaládokkal.